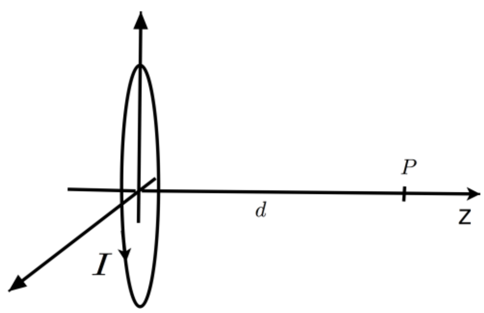
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

# Ayudantía 19

**Problema 1.** Demuestre que el campo magnético producido por una espira de radio $R$ y corriente $I$ en un punto $P$ del eje $z$ a una distancia $d$ de la espira está dado por:

$$\vec{B}_{(d)} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$




Por Biot-Savart tenemos que el campo magnético producido por una corriente eléctrica es

$$\vec{B}_{(\vec{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}_{(\vec{r}\prime)} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dl'$$

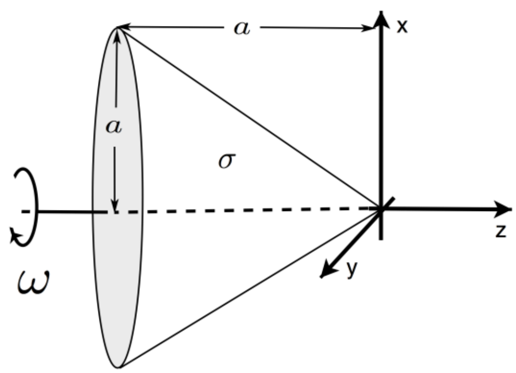
En este problema, de la imagen se tiene que

$$\vec{I}_{(\vec{r}\prime)} = I\hat{\theta} = I\sin(\theta)\,\hat{\imath} + I\cos(\theta)\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{r} = z\hat{k}$$
$$\vec{r}\,' = R\cos(\theta)\,\hat{\imath} + R\sin(\theta)\,\hat{\jmath}$$
$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = (z^2+R^2)^{3/2}$$
$$dl' = R\,d\theta$$

Reemplazando en la integral tenemos

$$\begin{aligned}\vec{B}_{(d)} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I(-\sin(\theta)\,\hat{\imath} + \cos(\theta)\,\hat{\jmath}) \times \left(z\hat{k} - R\cos(\theta)\,\hat{\imath} - R\sin(\theta)\,\hat{\jmath}\right)}{(z^2+R^2)^{3/2}} R\,d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} z\sin(\theta)\,\hat{\jmath} + R\hat{k} + z\cos(\theta)\,\hat{\imath}\,d\theta = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

**Problema 2.** Se tiene un cono hueco, de radio y alto $a$, cuya base es paralela al plano $x$-$y$ (ver figura). El cono tiene una densidad de carga superficial uniforme $\sigma > 0$ y gira con velocidad angular constante $\omega$ en torno al eje $z$. Calcule el vector campo magnético del sistema en el origen.




La magnitud del campo producido por un diferencial de área $dA$ es

$$dB = \frac{\mu_0 {R_{(z)}}^2 \, dI_{(z)}}{2\left(z^2 + {R_{(z)}}^2\right)^{3/2}}$$

El diferencial de corriente se puede escribir como un diferencial de área

$$dI_{(z)} = \frac{\sigma \, dA_{(z)}}{T}$$

Aquí $T$ es el periodo de giro y está dado por $T = \frac{2\pi}{\omega}$ donde $\omega$ es la velocidad angular
El diferencial de área está dado por

$$dA_{(z)} = \frac{2\pi R_{(z)}}{\cos(\pi/4)} dz = \frac{4\pi R_{(z)}}{\sqrt{2}} dz$$

Reemplazando todo obtenemos

$$dB = \frac{\mu_0 {R_{(z)}}^2}{2\left(z^2 + {R_{(z)}}^2\right)^{3/2}} \frac{\omega\sigma}{2\pi} \frac{4\pi R_{(z)}}{\sqrt{2}} dz = \frac{\mu_0 \omega \sigma {R_{(z)}}^3}{\sqrt{2}\left(z^2 + {R_{(z)}}^2\right)^{3/2}} dz$$

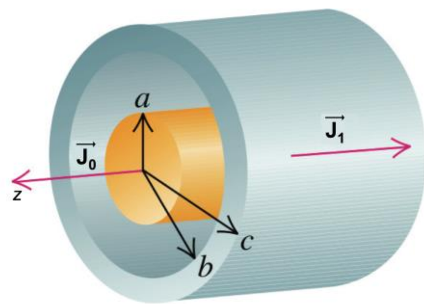
Pero el radio $R_{(z)}$ en función de $z$ es: $R_{(z)} = z$
Entonces:

$$dB = \frac{\mu_0 \omega \sigma z^3}{\sqrt{2}(2)^{3/2} z^3} dz = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{4} dz$$

Integramos

$$B = \int dB = \int_0^a \frac{\mu_0 \omega \sigma}{4} dz = \frac{\mu_0 \omega \sigma a}{4}$$

**Problema 3.** Un cable coaxial consiste en un dispositivo similar al que se muestra en la figura. Se tiene un cable cilíndrico sólido, largo y recto de radio $a$ concéntrico con el eje $z$ por el que pasa una corriente total $I$. La densidad de corriente que pasa por este cable está dada por $\vec{J}_0 = C_0 r\hat{k}$, donde $C_0$ es una constante positiva. Concéntrico al primer cable existe otro cable largo y recto, en forma de cascarón cilíndrico, con radio interno $b$ y radio externo $c$, por el que pasa una corriente en sentido opuesto al sentido de la corriente interna, de tal forma que $\vec{J}_1 = -C_1 r\hat{k}$ donde $C_1$ es una constante positiva.




a) Demuestre que $C_0 = \frac{3I}{2\pi a^3}$
b) Determine el campo magnético en la región $r < a$
c) Determine el campo magnético en la región $a < r < b$
d) Determine $C_1$ de tal forma que el campo magnético afuera del cable (en la región $r > c$) sea nulo
e) Asumiendo que $C_1$ tiene el valor que determinó en (d), determine el campo magnético en la región $b < r < c$
Nota: cuando se pide determinar el campo magnético se pide tanto la magnitud como la dirección

a) De la integral de la densidad de corriente tenemos

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = C_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} r^2 \, d\theta \, dr = \frac{2\pi a^3 C_0}{3} \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{3I}{2\pi a^3}$$

b) De la ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I' = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Si consideramos una curva de integración circular concéntrica con los cilindros de radio $r < a$ tendremos que el campo magnético es constante en esa curva (por simetría) y lo podemos sacar de la integral.

$$B \oint dl = 2\pi B r = \mu_0 I' = \mu_0 \int \vec{J}_0 \cdot d\vec{A} = \mu_0 C_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} r'^2 \, d\theta \, dr' = \frac{3\mu_0 I}{2\pi a^3} \cdot \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{\mu_0 I r^3}{a^3} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi a^3}$$

La dirección se obtiene por regla de la mano derecha

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi a^3}\hat{\theta}$$

c) Por ley de Ampere, para una curva circular de radio $a < r < b$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = 2\pi B r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$$

d) Si queremos que el campo magnético sea $\vec{B} = \vec{0}$ para $r > c$, debemos tener que

$$0 = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = 2\pi B r = \mu_0 I'' = \mu_0 \left(I + \int \vec{J}_1 \cdot d\vec{A}\right) = \mu_0 \left(I - C_1 \int_b^c \int_0^{2\pi} r^2 \, d\theta \, dr\right)$$
$$= \mu_0 \left(I - \frac{2\pi C_1 (c^3 - b^3)}{3}\right)$$

De aquí se obtiene $C_1$

$$C_1 = \frac{3I}{2\pi(c^3 - b^3)}$$

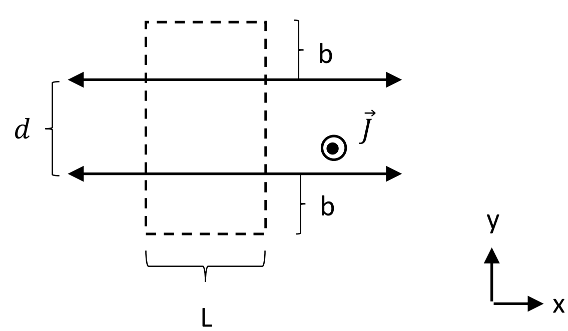
e) Calculamos el campo magnético entre $b < r < c$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi B r = \mu_0 I''' = \mu_0 \left(I + \int \vec{J}_1 \cdot d\vec{A}\right) = \mu_0 \left(I + \int \vec{J}_1 \cdot d\vec{A}\right) = \mu_0 \left(I - C_1 \int_b^r \int_0^{2\pi} r'^2 \, d\theta \, dr'\right)$$
$$= \mu_0 \left(I - \frac{3I}{2\pi(c^3 - b^3)} \cdot \frac{2\pi(r^3 - b^3)}{3}\right) = \mu_0 I \left(1 - \frac{r^3 - b^3}{c^3 - b^3}\right)$$

Finalmente

$$\vec{B} = \mu_0 I \left(1 - \frac{r^3 - b^3}{c^3 - b^3}\right)\hat{\theta}$$

**Problema 4.** Una lámina de grosor $d$ que se extiende infinitamente por el eje $x$ y $z$ lleva una densidad de corriente $\vec{J} = J\hat{k}$. Encuentre el campo magnético en todo el espacio.



La integral de línea cerrada se puede descomponer en cuatro integrales de línea que corresponden a los cuatro lados del rectángulo (curva de integración)

$$\mu_0 I = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\gamma_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\gamma_4} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Donde $\gamma_1$ es el trazo de curva horizontal de arriba, $\gamma_2$ el trazo vertical de la derecha, $\gamma_3$ el trazo horizontal de abajo y $\gamma_4$ el trazo vertical de la izquierda.
Por regla de la mano derecha tenemos que en la parte de arriba de la lámina $\vec{B} = -B\hat{\imath}$, mientras que en la parte de abajo $\vec{B} = B\hat{\imath}$, por lo que las integrales nos quedan

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} -B\hat{\imath} \cdot -\hat{\imath}\, dx + \int_{0}^{\frac{d}{2}+b} -B\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath}\, dy + \int_{-\frac{d}{2}-b}^{0} B\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath}\, dy + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} B\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}\, dx + \int_{0}^{\frac{d}{2}+b} -B\hat{\imath} \cdot -\hat{\jmath}\, dy + \int_{-\frac{d}{2}-b}^{0} B\hat{\imath} \cdot -\hat{\jmath}\, dy$$

Por los productos puntos 4 integrales se van a 0, y las dos que quedan son iguales

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} B dx = 2LB$$

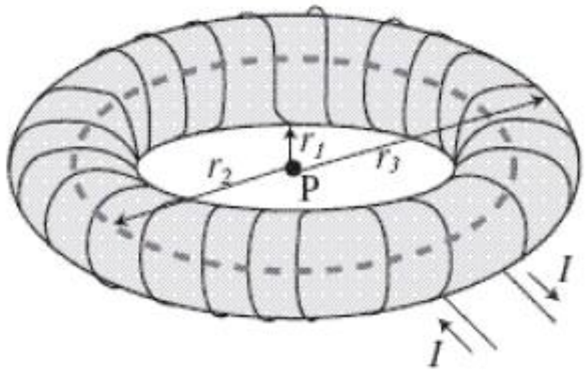
La corriente encerrada en esa curva es

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int J\hat{k} \cdot \hat{k}\, dA = JA = JL(2b + d)$$

Entonces la ley de Ampere queda

$$2LB = JL(2b + d) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{B} = -J\left(b + \dfrac{d}{2}\right)\hat{\imath} & y > \dfrac{d}{2} \\ \vec{B} = J\left(b + \dfrac{d}{2}\right)\hat{\imath} & y < -\dfrac{d}{2} \end{cases}$$

**Problema 5.** Un alambre es enrollado alrededor de una dona circular aislante como se muestra en la figura. Una corriente $I$ fluye por el cable en la dirección indicada por las flechas. Los radios interno, promedio y externo de la dona $r1$, $r2$ y $r3$, respectivamente, se encuentran indicados en la figura. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético en el punto P de la figura?




Por simetría se debe tener que el campo magnético debe ir en dirección $\hat{k}$ o $-\hat{k}$.
Supongamos el campo magnético en el punto $P$ tiene dirección $\hat{k}$. Si nos damos una vuelta en 180°, el sistema dado vuelta luce igual que el sistema anterior y el campo magnético apuntaría en $-\hat{k}$, luego hay una contradicción, ya que dos sistemas iguales tienen en un punto ($P$) dos campos magnéticos en direcciones opuestas. La única solución es que en el punto $P$, $\vec{B} = \vec{0}$